03 - Matematicki modeli sistema

- model u obliku diferencijalnih jednačina
- model u obliku prostora stanja
- model u obliku prenosne funkcije

Model u obliku diferencijalnih jednačina

Kontinualni linearni sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom matematički opisuje linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, oblika:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

gde su $a_j (j = 0,1,2,...,n)$ i $b_i (i = 0,1,2,..., m)$ konstantni koeficijenti.

Rešenje date diferencijalne jednačine je oblika:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

y_h je rešenje homogene diferencijalne jednačine:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n\text{-}1} \frac{d^{n\text{-}1} y}{dt^{n\text{-}1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

$$y \to \alpha^0 = 1$$

$$\frac{dy}{dt} \to \alpha^1 = \alpha$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \to \alpha^2$$

$$a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

$$D = a_1^2 - 4a_2 a_0$$

1. D>0 jedn. ima dva realna rešenja α1 I α2

$$y_h = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

2. D=0 jedn. ima jedno realno rešenje α

$$y_h = A_1 e^{\alpha t} + A_2 t e^{\alpha t}$$

3.D<0 dva konjugovana-komplesna rešenja

α+iβ i α-iβ

$$y_h = A_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + A_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

Oblik partikularnog rešenja se bira prema tabeli:

ulazni signal $x(t)$	uobičajeni oblik partikularnog rešenja $y_p(t)$
$x(t)=t^n$	$y_p(t)=C_1t^n+C_2t^{n\text{-}1}+\ldots+C_nt+C_{n+1}$
$x(t)=e^{\lambda t}$	$y_p(t)=Ce^{\alpha t}$ $y_p(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}$
$x(t)=\cos\ \omega t$ $x(t)=\sin\ \omega t$	$y_p(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$

Odrediti odziv sistema definisanog jednačinom za date početne uslove

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=1,\quad y(0)=0, y(1)=1$$

Opšte rešenje linearne diferencijalne j-ne sa konstantnim koeficijentima predstavlja zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine i proizvoljnog partikularnog rešenja date nehomogene jednačine.

U ovom slučaju data je nehomogena jednačina drugog reda.

Homogeno rešenje je rešenje koje zadovoljava levu stranu date diferencijalne j-ne kada se ista izjednači sa 0.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$y_h=A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$$

$$\alpha^2+2\alpha+1=0$$

$$D=4-4=0$$

$$\alpha_{1,2}=-1$$

$$y_h=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}$$

$$y_p=C_1$$

$$y=y_h+y_p=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}+C_1$$

$$\alpha_{1/2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}$$

$y = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} + C_1$

C_1 *kao partikularno rešenje zadovoljava datu jednacinu, pa je:*

$C_1 = 1$

$y(0) = A_1 + C_1 = 0 \rightarrow A_1 = -C_1 = -1$

$y(1) = A_1 e^{-1} + A_2 e^{-1} + 1 = 1 \rightarrow (A_1 + A_2) e^{-1} = 0 \rightarrow A_2 = -A_1 = 1$

$$y = -e^{-t} + t e^{-t} + 1$$

$$y = 1 + (t-1) e^{-t}$$

Odrediti odziv sistema definisanog jednačinom

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$$

Koji zadovolja početne uslove:

$$y(0) = 0, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$$

Opšte rešenje linearne diferencijalne j-ne sa konstantnim koeficijentima predstavlja zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine i proizvoljnog partikularnog rešenja date nehomogene jednačine.

U ovom slučaju data je nehomogena jednačina drugog reda.

Homogeno rešenje je rešenje koje zadovoljava levu stranu date diferencijalne j-ne kada se ista izjednači sa 0.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad\qquad a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

Karakteristična jednačina koja se pridružuje datoj homogenoj diferencijalnog jednačini ima oblik:

$$a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha^1 + a_0 \alpha^0 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2a_0 = 0$$

$$a\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$$

a njena diskriminantna je:

$$D = a_1^2 - 4a_2a_0 = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

pošto je D>0 opšte rešenje homogene dif. jed. je oblika

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

α_1=-1; α_2=-2

samo rešene homogene jednačine je: $y_h = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$

$$y_h = A_1 e^{-1t} + A_2 e^{-2t}$$

Homogeno rešenje diferencijalne j-ne zavisi od karaktera sistema, a ne od ulaznog signala x(t) i naziva se slobodan odziv.

Konstante A_1, A_2, ..., A_n određuju se na osnovu poznatih početnih uslova j-ne.

Partikulano rešenje y_p zavisi od ulazne funkcije x(t) i zadovoljava diferencijalnu j-nu. Partikularno rešenje se naziva prinudni odziv sistema.

Partikularno rešenje se određuje na osnovu tabele data na strani 101 u knjizi.

$x(t) = t^n = t^0 = 1 \Rightarrow y_p = C_1$ izvod konstante je nula

$$\cancel{\frac{d^2 y_p}{dt^2}} + 3\cancel{\frac{dy_p}{dt}} + 2y_p = 1$$

$2y_p = 1$ y_p=1/2=C_1

Opšte rešenje deferencijalne j-ne jednako je zbiru homogenog i partikularnog rešenja:

$$y = A_1 e^{-1t} + A_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}$$ opšte rešenje

Konstante A_1 i A_2 se određuju na osnovu datih početnih uslova.

$y(0) = 0 \Rightarrow y\,(0) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 + \frac{1}{2} = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1 \Rightarrow -A_1 \cdot e^0 - 2A_2 \cdot e^0 = 1 \Rightarrow -A_1 - 2A_2 = 1$$

$$A_1 + A_2 = -\tfrac{1}{2}$$

$$-A_1 - 2A_2 = 1$$

$$\Rightarrow -A_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$A_1 = -\tfrac{1}{2} - A_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 0$$

Opšte rešenje date dif. j-ne glasi

$$y = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

y_s=1/2 stacionarni odziv sistem

y_{ns}= -1/2e^{-2t} nestacionarni odziv sistem

Stacionarni odziv je odziv koji ne teži 0 kada nezavisno promenljiva t teži beskonačno.

Nestacionarni odziv je odziv koji teži 0 kada nezavisno promenljiva t teži beskonačno.

Model u obliku jednačina prostora stanja

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Ako diferencijalnu jednačinu ponašanja sistema napišemo po najvećem izvodu, ona dobija oblik:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} = -a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - \ldots - a_1 \frac{dy}{dt} - a_0 y + b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left[t, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, x(t) \right]$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= \frac{dy}{dt} \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \\ z_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= f\left(t, z_1, \ldots, z_n, x(t)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \\ \dot{z}_2 &= f_2\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= f_n\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= g_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \\ y_2 &= g_2\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \\ &\vdots \\ y_m &= g_m\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2, \ldots x_r, t\right) \end{aligned}$$

Opšti oblik modela

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Model za linearne kontinualne sisteme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Primer:

Sistem čija je diferencijalna j-na ponašanja oblika $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$ prikazati modelom u obliku j-na prostora stanja.

Data difencijalna j-na može se napisati u obliku:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 1 - 2y - 3\frac{dy}{dt}$$

Pošto je data diferencijalna j-na drugog reda potrebno je uvesti 2 promenljive stanja:

$$z_1 = y$$

$$z_2 = \frac{dy}{dt}$$

Model u obliku j-ne prostora stanja sadrži 2 diferencijalne j-ne prvog reda i tada model ima oblik

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = 1 - 2z_1 - 3z_2$$

Da bi smo dobili vektorsku formu modela prostora stanja potrebno je diferencijalnu j-nu napisati u sledećem obliku:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{z}_1 = 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 0 \cdot 1 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 - 3z_2 + 1 \cdot 1$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} z_2 \\ -2z_1 - 3z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 1 - 2z_1 - 3z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

Primer

Diferencijalnu jednačinu ponašanja sistema $3\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 2x$ transformisati u jednačinu prostora stanja.

$$\frac{d^4y}{dt^4} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{3}y$$

Pošto je data diferencijalna j-na četvrtog reda potrebno je uvesti 4 promenljive stanja

$$z_1 = y \qquad \overset{*}{z}_1 = z_1$$

$$z_2 = \frac{dy}{dt} \qquad \overset{*}{z}_2 = z_2$$

$$z_3 = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \overset{*}{z}_3 = z_4$$

$$z_4 = \frac{d^3y}{dt^3} \qquad \overset{*}{z}_4 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}z_3 - \frac{2}{3}z_1$$

Diferencijalnu jednačinu ponašanja sistema $\frac{d^5y}{dt^5} + 3\frac{dy^3}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} + y = 5$ transformisati u jednačinu prostora stanja.

$$\frac{d^5y}{dt^5} = 5 - y - 3\frac{dy^3}{dt^3} - 2\frac{dy}{dt}$$

$$z_1 = y \qquad \overset{*}{z}_1 = z_1$$

$$z_2 = \frac{dy}{dt} \qquad \overset{*}{z}_2 = z_2$$

$$z_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \overset{*}{z}_3 = z_3$$

$$z_4 = \frac{d^3 y}{dt^3} \qquad \overset{*}{z}_4 = z_5$$

$$z_5 = \frac{d^4 y}{dt^4} \qquad \overset{*}{z}_5 = 5 - z_1 - 3z_4 - 2z_2$$

Model u obliku funkcije prenosa

Funkcija prenosa se definiše kao odnos Laplasove transformacije izlaza i Laplasove transformacije ulaza sistema, pri nultim početnim uslovima.

$$Y(s) = L\left[y(t)\right] = \int_0^\infty y(t)\ e^{-st} dt$$

Laplasova transformacija izlaza

$$X(s) = L\left[x(t)\right] = \int_0^\infty x(t)\ e^{-st} dt$$

Laplasova transformacija ulaza

$$y(0) = 0,\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0\ ,\ldots \left.\frac{d^n y}{dt^n}\right|_{t=0} = 0$$

početni uslovi

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

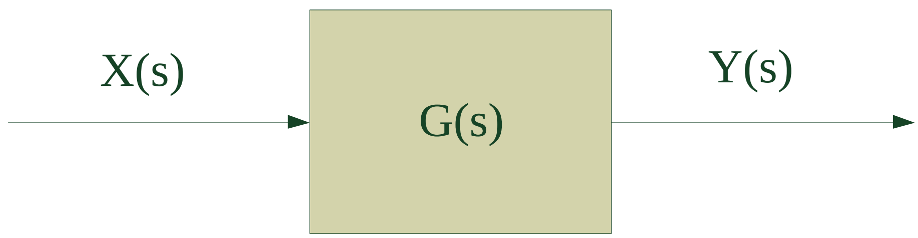
Pri korišćenju modela u obliku f-je prenosa svi početni uslovi su jednaki nuli. To dozvoljava da se diferencijalna j-na prevede u Laplasov domen jednostavnom zamenom.

$$\frac{d}{dt} \to s \qquad \frac{d^2}{dt^2} \to s^2 \qquad \frac{d^n}{dt^n} \to s^n$$

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$



Laplasova transformacija je integralna transformacija, koja datu kauzalnu funkciju f(t) (original) preslikava iz vremenskog domena (t = vreme) u funkciju F(s) u kompleksnom spektralnom domenu.

Ovaj postupak prevodi diferencijalnu j-nu u algebarsku j-nu po Laplasovoj promenljivoj S.

PRIMER Sistem čija je diferencijalna j-na ponašanja oblika:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$$

Prikazati modelom u obliku funkcije prenosa

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

$$(s^2 - 3s \quad + 2)Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - 3s \quad + 2}$$

b) $3\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{d^2x}{dt^2} - x$

$$3s^3Y(s) - s^2Y(s) + Y(s) = s^2X(s) - X(s)$$

$$(3s^3 - s^2 + 1)Y(s) = (s^2 - 1)X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - 1}{3s^3 - s^2 + 1}$$

c) $3\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 2x$

$$3s^4Y(s) + \frac{1}{2}s^2Y(s) - 2Y(s) = 2X(s)$$

$$(3s^4 + \frac{1}{2}s^2 - 2)Y(s) = 2X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{3s^4 + \frac{1}{2}s^2 - 2}$$

Diferencijalnu jednačinu ponašanja sistema $\frac{d^5y}{dt^5} + 3\frac{dy^3}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} + y = 5$ transformisati u model u obliku f-je prenosa.

$$\frac{d^5y}{dt^5} + 3\frac{dy^3}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} + y = 5$$

$$S^5Y(S) + 3S^3Y(S) + 2SY(S) + Y(S) = 5X(S)$$

$$Y(S)(S^5 + 3S^3 + 2S + 1) = 5X(S)$$

$$G(X) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{5}{(S^5+3S^3+2S+1)}$$